Ejercicio 1 Septiembre (mod4) 2020 (Análisis)

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x\cdot(x^2 - 5x + 6)$. Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica. (2'5 puntos)

Solución

Sabemos que la curvatura es el estudio de la 2ª derivada.

$f(x) = e^x\cdot(x^2 - 5x + 6)$; $f'(x) = e^x\cdot(x^2 - 5x + 6) + e^x\cdot(2x - 5) = e^x\cdot(x^2 - 3x + 1)$.
La 2ª derivada es $f''(x) = e^x\cdot(x^2 - 3x + 1) + e^x\cdot(2x - 3) = e^x\cdot(x^2 - x - 2)$.

De $f''(x) = 0$, tenemos $x^2 - x - 2 = 0 \to x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$, de donde $x = -1$ y $x = 2$ que serán los posibles puntos de inflexión.

Como $f''(-2) = e^{-2}\cdot(4) > 0$, **f es convexa ($\cup$) en $(-\infty, -1)$.**
Como $f''(0) = e^0\cdot(-2) < 0$**, f es cóncava ($\cap$) en $(-1, 2)$.**
Como $f''(3) = e^3\cdot(1) > 0$, **f es convexa ($\cup$) en $(2, +\infty)$.**

Por definición **x = -1 es punto de inflexión y vale f(-1) =** $e^{-1}\cdot(12)$ **= 12/e $\cong$ 4'41455.**
Por definición **x = 2 es punto de inflexión y vale f(-1) =** $e^2\cdot(0)$ **= 0.**

Ejercicio 2 Septiembre (mod4) 2020 (Análisis)

Calcula $\int_0^{\pi} x\cdot sen^2(x)dx$. (2'5 puntos)

Solución

$x^2/4 - (1/8)\cos(2x) - (1/4)(x\cdot sen(2x))$
Calculamos primero la integral indefinida, y es un integral por partes:

Recordamos que de "$\cos^2(x) + sen^2(x) = 1$" y "$\cos^2(x) - sen^2(x) = \cos(2x)$". Sumando y restando obtenemos $\cos^2(x) = (1 + \cos(2x))/2$ y $sen^2(x) = (1 - \cos(2x))/2$

$$I = \int x\cdot sen^2(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad \Rightarrow du = dx \\ dv = sen^2(x)dx = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}dx \\ v = \displaystyle\int \dfrac{1-\cos(2x)}{2}dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{sen(2x)}{4} \end{array} \right\} = x\cdot\left(\frac{x}{2} - \frac{sen(2x)}{4}\right) - \int\left(\frac{x}{2} - \frac{sen(2x)}{4}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x\cdot sen(2x)}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{\cos(2x)}{8} + K = \frac{x^2}{4} - \frac{x\cdot sen(2x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{8} + K.$$

Por tanto $\int_0^{\pi} x\cdot sen^2(x)dx = \left[\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x\cdot sen(2x)}{4} - \dfrac{\cos(2x)}{8}\right]_0^{\pi}$ **= $(\pi^2/4 - (\pi\cdot 0)/4 - 1/8) - (0 - 0 - 1/8) = \pi^2/4$.**

Ejercicio 3 Septiembre (mod4) 2020 (Algebra)

Considera el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Discute el sistema según los valores de m. (1'5 puntos)
b) Para m = -2, ¿existe alguna solución con z = 0? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. (1 punto)

Solución

(a)
Discute el sistema según los valores de m.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ m & 4 & -2 & 2m \\ 0 & m+2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (-1)(m+2)(-2-m) + (-3)(4+2m) = (m+2)(m+2) - 6(2+m) = (m+2)(m-4)$.

De $(m+2)(m-4) = 0$, tenemos $m = -2$ y $m = 4$.

Si $m \neq -2$ y $m \neq 4$, $|A| \neq 0$, tenemos **rango(A) = rango(A*) = 3** = número de incógnitas, por el Teorema de Rouche, el **sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si m = -2, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 0 = -3 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, por tener las filas 1ª y 2ª proporcionales, rango(A*) = 2

Si m = -2, tenemos **rango(A) = rango(A*) = 2** < número de incógnitas, por el Teorema de Rouchè, el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, (más de una).

Si m = 4, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 8 = 12 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-4F_1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila} \end{matrix} = 12(1 - 0) = 12 \neq 0$, rango(A*) = 3.

Si m = 4, tenemos **rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3**, por el Teorema de Rouchè, el **sistema es incompatible y no tiene solución**.

(b)

Para m = -2, ¿existe alguna solución con z = 0? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Hemos visto en el apartado (a) que tiene más de una solución y como el rango es 2, sólo necesitamos dos ecuaciones. Utilizo la primera y la tercera: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ \quad\quad -3z = 1 \end{cases}$. **Tenemos z = -1/3, y <u>nunca puede ser z = 0</u>**, tomando $y = b \in \mathbb{R}$, resulta $x = 2b + 7/3$ **y la solución del sistema para m = -2 es: (x, y, z) = (7/3 + 2b, b, -1/3) con $b \in \mathbb{R}$.**

Ejercicio 4 Septiembre (mod4) 2020 (Geometría)

Considera el plano $\pi \equiv x - y + az = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

(a) Halla a sabiendo que π es paralelo a r. (1'5 puntos)
(b) Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto P(1, 2, 3). (1 punto)

Solución

(a)

Halla a sabiendo que π es paralelo a r.

Si π es paralelo a r el vector normal del plano π, **n** = (1, -1, a) tiene que ser perpendicular al vector director de la recta r, el $\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= \mathbf{i}(-3+8) - \mathbf{j}(4-12) + \mathbf{k}(-8+9) = (5, 8, 1)$

De **n•u =** (1, -1, a)•(5, 8, 1) = 0 = 5 – 8 + a = -3 + a = 0, **tenemos a = 3 para π sea paralelo a r.**

(b)

Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto P(1, 2, 3).

El plano π' perpendicular a r tiene por vector normal **n'** el directo de e, **u** = (5, 8, 1).

El plano pedido es: **π' ≡ PX•u = 0 =** (x - 1, y - 2, z - 3)•(5, 8, 1) **= 5x + 8y + z – 24 = 0**.

Ejercicio 5 Septiembre (mod4) 2020 (Análisis)

Sea la función derivable f : R → R definida por $f(x) = \begin{cases} e^{2ax - 4b} & \text{si } x < 1 \\ 1 - x\cdot\ln(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

(ln denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina los valores de a y b. (1'75 puntos)

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisas x = 2. (0'75 puntos)

Solución

(a) Determina los valores de a y b.

Como la función es derivable en R, es continua en R; en particular en continua y derivable en x = 1.

Como f(x) es continua en x = 1 tenemos $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1 - x\cdot\ln(x) = 1 - 1\cdot\ln(1) = 1.$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (e^{2ax - 4b}) = e^{2a - 4b}.$

De $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, tenemos $1 = e^{2a - 4b}$, de donde **2a - 4b =** ln(1) **= 0,** de donde **a = 2b**.

Como f(x) es derivable en x = 1 tenemos $f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, veremos la continuidad de la derivada.

$f(x) = \begin{cases} e^{4bx - 4b} & \text{si } x < 1 \\ 1 - x\cdot\ln(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} 4b\cdot e^{4bx - 4b} & \text{si } x < 1 \\ -(1\cdot\ln(x) + x\cdot(1/x)) & \text{si } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 4b\cdot e^{4bx - 4b} & \text{si } x < 1 \\ -1 - \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(4b\cdot e^{4bx - 4b}\right) = 4b\cdot e^0 = 4b.$ $f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-1 - \ln(x)) = -1 - \ln(1) = -1.$

De $f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, **tenemos 4b = -1**, de donde **b = -1/4 y a = -1/2**.

(b)

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisas x = 2. (0'75 puntos)

El punto de abscisa x = 2 está en la rama x ≥ 1, donde f(x) = 1 - x·ln(x) y f '(x) = -1 - ln(x).

La recta tangente en x = 2 es "y - f(2) = f '(2)(x - 2)".

Tenemos f(2) = 1 - 2·ln(2) y f '(2) = -1 - ln(2).

La recta normal en x = π/3 es "y – f(π/3) = (-1/ f '(π/3))(x - π/3)".

Tenemos f(π/3) = $\sqrt{3}$ / 3 y f '(π/3) = 0 (anulaba la primera derivada).

Luego **la recta tangente en x = 2 es "y - (1 - 2·ln(2)) = (-1 - ln(2))·(x - 2)", es decir y = (-1 - ln(2))x + 3.**

Ejercicio 6 Septiembre (mod4) 2020 (Análisis)

Considera las funciones f, g : R → R definidas por f(x) = |x| y g(x) = x^2 - 2.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que determinan. (1 punto)

b) Determina el área del recinto anterior. (1'5 puntos)

Solución

(a)

Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que determinan. (1 punto)

Sabemos que f(x) = |x| = $\begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ +x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$. Su gráfica está formada por dos semirrectas, "x" y "– x" son rectas luego con dos puntos es suficiente para dibujarlas ("x" es la bisectriz del I y III cuadrante, y solo se dibuja para x ≥ 0, y "- x" es la bisectriz del II y IV cuadrante, y solo se dibuja para x < 0).

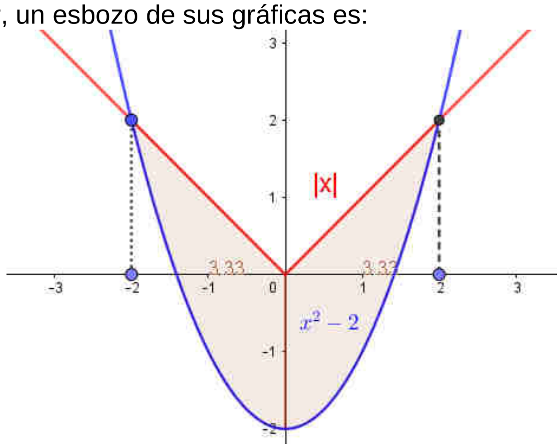
La gráfica de "x^2 - 2" es la de una parábola con las ramas hacia arriba (el nº que multiplica a x^2 es positivo), abscisa del vértice en la solución de f '(x) = 0 = 2x = 0 → x = 0, luego el vértice es V(02, f(0)) = V(0, -2).

Calculamos los puntos de corte entre ambas gráficas, es decir las soluciones de "f(x)" = g(x)"

Si x < 0, tenemos - x = x^2 - 2 → 0 = x^2 + x - 2 → $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$, de donde x = -2 y x = 1. Solo sirve x = -2 (estamos en x<0), luego el punto de corte es (-2, 2).

Si x > 0, tenemos x = x^2 - 2 → 0 = x^2 - x - 2 → $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$, de donde x = -1 y x = 2. Solo sirve x = 2 (estamos en x > 0), luego el punto de corte es (2, 2).

Teniendo en cuenta lo anterior, un esbozo de sus gráficas es:



(b)

Determina el área del recinto anterior.

Área = {por simetría} = $2\cdot\int_0^2 \left(x - x^2 + 2\right)dx = 2\cdot\int_0^1 \left(-x^2 + x + 2\right)dx = 2\cdot\left[\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 =$

= 2·[(-8/3 + 2 + 4) – (0)] u2 **= 20/3 u² ≅ 6'6667 u².**

Ejercicio 7 Septiembre (mod4) 2020 (Algebra)

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Halla los valores de λ tales que |A - λI| = 0, donde I es la matriz identidad de orden 3. (1'25 puntos)

b) Para λ = 1, resuelve el sistema dado por (A - λI) = O. ¿Existe solución tal que z = 1? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. (1'25 puntos)

Solución

(a)

Halla los valores de λ tales que |A - λI| = 0, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Tenemos (A - λI) = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$.

Luego $|A - \lambda I| = 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna $= (1 - \lambda)((-\lambda)(1 - \lambda) - 2) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2)$.

De $(1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2)$ tenemos $\lambda = 1$ y $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ de donde $\lambda = 2$ y $\lambda = -1$, **por tanto para $\lambda = -1$, $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$ tenemos $|A - \lambda I| = 0$**.

(b)

Para $\lambda = 1$, resuelve el sistema dado por $(A - \lambda I)X = O$. ¿Existe solución tal que $z = 1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. (1'25 puntos)

Tenemos para $\lambda = 1$, $(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, luego de $(A - \lambda I)X = O$ resulta $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir el sistema $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2y + 3z \\ -y + 2z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de donde $y = 0$, $z = 0$ y $x = m \in R$, **y la solución del sistema es $(x, y, z) = (m, 0, 0)$ con $m \in R$, <u>por tanto no existe solución tal que $z = 1$.</u>**

Ejercicio 8 Septiembre (mod4) 2020 (Geometría)

Considera el plano $\pi \equiv x - y + z = 2$ y la recta $r \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$.

(a) Calcula la distancia entre r y π. (1 punto)

(b) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r. (1'5 puntos)

Solución

(a)

Calcula la distancia entre r y π. (1 punto)

Sabemos que π es paralelo a r si el vector normal del plano π, $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$ es perpendicular al vector director de la recta r, el $\mathbf{u} = (2, 1, -1)$.

Como $\mathbf{n} \bullet \mathbf{u} =$ $(1, -1, 1) \bullet (2, 1, -1) = 2 - 1 - 1 = 0$*, tenemos que el plano π es paralelo a la recta r.*

Luego $d(r, \pi) = d(A, \pi)$ siendo A un punto cualquiera de la recta, en nuestro cado $A(0, -1, -2)$.

Tenemos $d(r, \pi) = d(A; \pi) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{|(0) - (-1) + (-2) - 2|}{\sqrt{1^2 + ^2 + 1^2}}$ u^1 $\mathbf{= |-3|/\sqrt{(3)}\ u^1 = \sqrt{(3)}\ u^1 \cong 1'73205\ u^1.}$

(b)

Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r. (1'5 puntos)

Para un plano necesitamos un punto, el $A(0, -1, -2)$ (contiene a r) y dos vectores el $\mathbf{u} = (2, 1, -1)$ (contiene a r) y el $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$ (el plano es perpendicular al π).

El plano pedido es: $\pi' \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = 0 = \begin{vmatrix} x & y+1 & z+2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= x(1-1) -(y+1)(2+1) + (z+2)(-2-1) = 0 =$

$\mathbf{= -3y - 3z - 9 = 0 = y + z + 3 = 0.}$